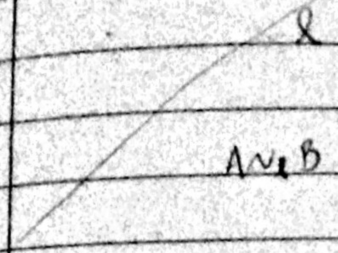
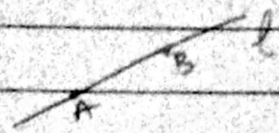
26/10/16

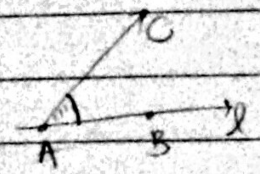


$A \sim_{\ell} B$

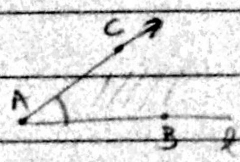


● **Ορισμός**: $A \neq B$, A, B διέρχεται ευθεία από αυτά με A διάφορο και:
$\vec{AB} = \{x \in \ell : x \sim_A B\} \cup \{A\}$ ημιευθεία με κορυφή το A.

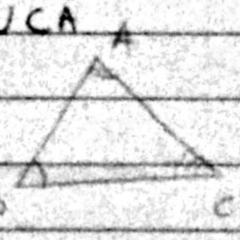
● **Ορισμός (γωνία)**: Θεωρούμε 3 σημεία διαφορετικά και μη συνευθειακά A, B, C.
$\vec{AC}, \vec{AB}$ 2 ημιευθείες με κοινή κορυφή $\vec{AC} \cup \vec{AB} = B\hat{A}C = C\hat{A}B$



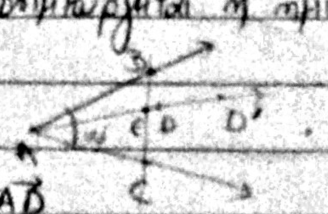
● **Ορισμός**: Το εσωτερικό της γωνίας $B\hat{A}C = \{D$ επιπέδου: $D \sim_{AB} C$ και $D \sim_{AC} B\}$



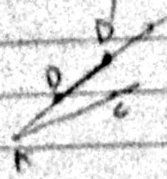
● **Ορισμός**: A, B, C μη συνευθειακά, $A\overset{\triangle}{B}C \underset{\text{τρ}}{=} \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$
Το εσωτερικό του $A\overset{\triangle}{B}C = \{D :$ D εσωτερικό των 3 γωνιών του $A\overset{\triangle}{B}C\}$



● **Θεώρημα**: Έστω γωνία $B\hat{A}C$ $(=\omega)$ με A, B, C μη συνευθειακά. Διαλέγουμε ένα D ώστε να ανήκει στο εσωτερικό της γωνίας $B\hat{A}C$, τότε δημιουργείται η ημιευθεία $\vec{AD}$, με $A \neq D$ (**Παρατήρηση** (*) $\vec{AD} \subseteq$ [εσωτερικό της ω])
Όπου $\vec{AD} \subseteq$ [εσωτ(ω)] Για $B \neq C$ ορίζεται η ευθεία BC (και είναι $\overline{BC}$) $\Rightarrow \exists E : B * E * C$ τότε $E \in \vec{AD}$
(ή μπορούμε να πούμε $E \in \overline{BC}$ & $E \in \vec{AD}$ τότε $\vec{AD} \cap \overline{BC} = \{E\}$)



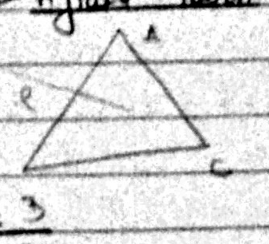
(*) **Απόδειξη**: Θ.δ.ο. $D' \sim_{AC} B$ ① & $D' \sim_{AB} C$ ②
Το $D \sim_{AC} B$ ως εσωτερικό της ω, θέλουμε να δείξουμε $D' \sim_{AC} B$ ①, αν δείξουμε ότι $D' \sim_{AC} D \Rightarrow$ ① (αφού ισχύει η μεταβατικότητα). $D' \notin$ [ευθεία AC] διότι αν $D' \in AC$ τότε



A, D' ορίζουν ημιεπίπεδο, όπου AD' = AC → D' ∈ AC, οπότε όπου D' ∈ (ημιευθεία)
Άρα, έπεται ότι D' ∈ AC. Παράλληλα D' ∉ AB
Για την ① αρκεί νδο $D' \sim_{AC} D$ (D, D' ∉ AC) ⟺ $DD' \cap AC = \emptyset$ ④ ισχύει?
Αν δεν ισχύει η ④ τότε $\overline{DD'} \cap AC \neq \emptyset \Rightarrow DD' \cap AC \neq \emptyset = \{A\}$ ⑤ Άτοπο
Διότι αν ⑤ ισχύει τότε $A \in \overline{DD'} \Rightarrow D \not\sim_{A} D'$ Άρα $D' \in \overrightarrow{AD} \Rightarrow D' \sim_{A} D$

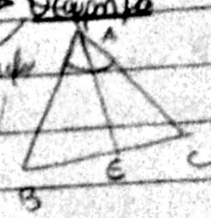
• **Περαιτέρω θέματα διάταξης**

▶ **Αξίωμα Pasch**



▶ **Θεώρημα**

(Θα αποδειχθεί με Pasch)



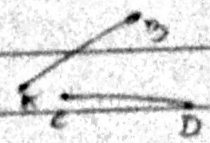
• **Ευθύγραμμα**

$A \neq B$

$C \in \overline{AB} \Leftrightarrow C = A$ ή $C = B$ ή $A * C * B$

$\overline{BA} = \{C' : C' = A$ ή $C' = B$ ή $B * C' * A\}$

$\overline{AB} = \overline{BA}$



$AB \neq CD$

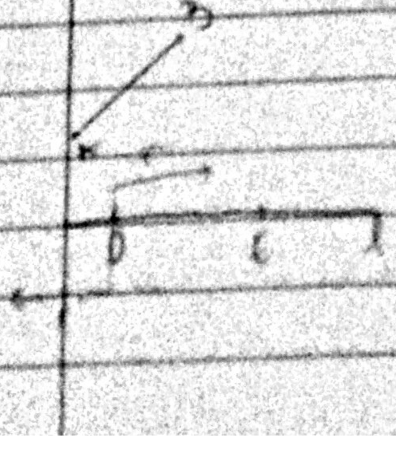
$AB \cong CD$

• **Αξιώματα ισότητας**

Υποθέτουμε ότι υπάρχει "μία σχέση" που συμβολίζουμε ≅ στο σύνολο των ευθυγράμμων τμημάτων του επιπέδου που ικανοποιεί τα εξής:

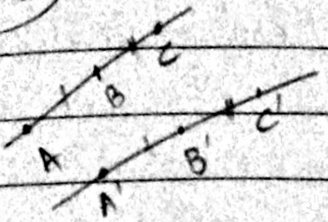
Μεταφορά ευθυγράμμων τμημάτων σε ημιευθείες

I1 Αν $\overline{AB}$ ευθύγραμμο τμήμα και D σημείο που ανήκει σε ευθεία l τότε αν r μια αντίστοιχη ημιευθεία ⊆ l που έχει κορυφή το D τότε στην r, υπάρχει μοναδικό σημείο E, έτσι ώστε να $\overline{AB} \cong \overline{DE}$



I_2) Αν AB, CD, EF 3 ευθύγραμμα τμήματα: $\left.\begin{array}{l}\overline{AB}\cong\overline{CD}\\ \overline{AB}\cong\overline{EF}\end{array}\right\}\Rightarrow$ 1) $\overline{CD}\cong\overline{EF}$ 2) $\overline{AB}\cong\overline{AB}$ (τυχ.)

I_3) Αν $A*B*C$ & $A'*B'*C'$, αν $\overline{AB}\cong\overline{A'B'}$ & $\overline{BC}\cong\overline{B'C'}\Longrightarrow$
$\Longrightarrow\overline{AC}\cong\overline{A'C'}$



● __Άσκηση__ Η σχέση $\cong$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των ευθύγραμμων τμημάτων του επιπέδου. (Χρήση μόνο I_2)

__Λύση__

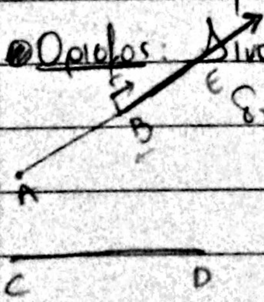
1) Ανακλαστική $\overline{AB}\cong\overline{AB}$ (I_2) ισχύει

2) Συμμ. $\overline{AB}\cong\overline{CD}\Rightarrow\overline{CD}\cong\overline{AB}$ (__Απόδειξη__ $\overline{AB}\cong\overline{CD}$ & $\overline{AB}\cong\overline{AB}\overset{I_2}{\Rightarrow}\overline{CD}\cong\overline{AB}$)

3) Μεταβατική: $\left.\begin{array}{l}\overline{AB}\cong\overline{CD}\ ①\\ \overline{CD}\cong\overline{EF}\ ②\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{AB}\cong\overline{EF}$ (__Απόδειξη__ $\left.\begin{array}{l}①\Rightarrow\overline{CD}\cong\overline{AB}\\ ②\Rightarrow\overline{CD}\cong\overline{EF}\end{array}\right\}\overset{I_2}{\Rightarrow}\overline{AB}\cong\overline{EF}$)

- Πως θα ορίσουμε το άθροισμα 2 ευθ. τμημάτων;

● __Ορισμός__: Δίνονται 2 ευθύγραμμα τμήματα $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ (Δίνουμε μια διάταξη στα A, B δηλ. 1ο A, __2ο B__ κ. θα ορίσουμε AB+CD=;)

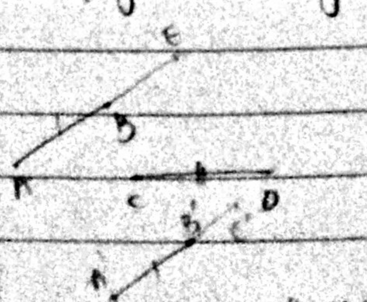


Θα θεωρήσουμε το B, αρχή 2 ημιευθειών κ. διαλέγουμε αυτή που είναι αντίθετα στο A, δηλ. διαλέγουμε την ημιευθεία $r\subseteq l=AB$ που αποτελείται από εκείνα τα σημεία $X\in l$: $X=B$ ή $X\nsim_B A$

Από το I_1), $\exists$ μοναδικό σημείο της r, έστω E: $\overline{BE}\cong\overline{CD}$, τότε ορίζουμε το άθροισμα: $\boxed{\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AE}}$

● __Πρόταση__: Αν $\left.\begin{array}{l}\overline{AB}\cong\overline{A'B'}\\ \overline{CD}\cong\overline{C'D'}\end{array}\right\}\Longrightarrow\overline{AB}+\overline{CD}\cong\overline{A'B'}+\overline{C'D'}$

● __Εφαρμογή__ (η απόδειξη)



Βρίσκουμε μοναδικό E συνευθειακό με τα A, B των με $A\nsim_B E$: $\overline{BE}\cong\overline{CD}$. Τότε, από ορ. $AB+CD=AE$.
Παρόμοια κ. στο A', B', βρίσκουμε E', όπου $E'\nsim_{B'}A'$ με $\overline{B'E'}\cong\overline{C'D'}$. Τότε, $\overline{A'B'}+\overline{C'D'}=\overline{A'E'}$

Άρα, να δείξει ότι $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, από το I_3 θα αποδειχθεί

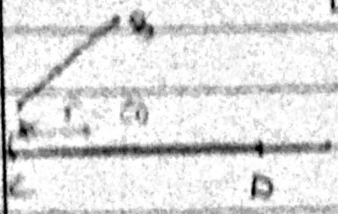
Δηλ. $A*B*C$ & $AB \cong A'B'$ (1) $\Big\}$ $\xrightarrow{I_3}$ $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

$A'*B'*C'$ $\overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{B'C'}$ (2)

● Ορισμός: Δίνονται τα A, B, C, D με $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. Δεδομένου τα αξιώματα I_1, I_2, I_3

Πότε θα λέμε ότι $\overline{AB} < \overline{CD}$ (1)?

↳ Αν το μοναδικό (από I_1) E, $E \in \overrightarrow{CD}$ ώστε (AB ≅ CE) βρίσκεται και μεταξύ των C, D (C*E*D) τότε ισχύει η (1)



► Παρατηρήσεις

1) A, B, C: A*B*C ισχύει $\overline{AB} < \overline{AC}$;

Αρκεί να βρούμε ένα E μεταξύ των A, C τ.ω. $\overline{AB} \cong \overline{AE}$

(Για E=B άμεσο)

2) (Αντίστροφο) Έστω 3 ευθύγραμμα σημεία, A, B, C διαφορετικά και $\overline{AB} < \overline{AC}$

$\Longrightarrow A*B*C$;

Υ1) $\overline{AB} < \overline{AC}$ δηλ. ∃E μοναδικό μεταξύ των A, C: $\overline{AB} \cong \overline{AE}$

Υ2) & $B \sim_A C$

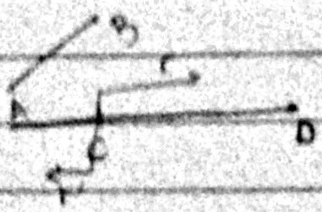
Αν δείξουμε ότι $\boxed{E=B}$ B μεταξύ των A, C δηλ. A*B*C

E: $\overline{AE} \cong \overline{AB}$ ή το E στην ίδια πλευρά με C, ως προς A. Δηλ. $E \sim_A C$

Από Υ2) $B \sim_A C$ & $E \sim_A C$ $\xrightarrow{\text{ισοδυναμία σχέση}}$ $E \sim_A B$

Έχουμε $AE \cong AB$ ✓, άρα E=B ✓

3°



Πώς γνωρίζουμε ότι στην μεταξύ έστω ... του C?

Από το I_1, $r = \overrightarrow{CD}$, ∃!$E \in \overrightarrow{CD}$ ώστε $AB \cong CE$

$E \in r$ ή $\boxed{E \sim_C D}$ ⟹ $E \notin r'$ ($E \in r'$, $E \not\sim_C D$)

Όχι (E*C*D) (2)

(1): C*E*D → CE < CD ⟹ AB < CD

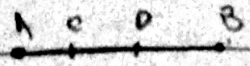
(3): C*D*E → $\overline{CD} < \overline{CE} \cong \overline{AB}$

Δηλαδή: $\overline{AB}, \overline{CD}$

$\overline{CD}<\overline{AB}$ $\quad$ $\overline{AB}=\overline{CD}$ $\quad$ $\overline{AB}<\overline{CD}$

Άσκηση

α) Δίνεται $\overline{AB}$, $A\neq B$. Τότε δεν υπάρχουν εσωτερικά σημεία του $\overline{AB}$, C, D τ.ω.
$C * A * D$



Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν C, D $\quad$ C εσωτ. του $\overline{AB} \Rightarrow C\neq A, C\neq B : A*C*B$ (1)

D εσωτ. $\overline{AB} \Rightarrow D\neq A, D\neq B : A*D*B$ (2)

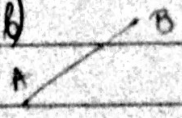
(1): $A*C*B \Leftrightarrow \begin{cases} A \not\sim_C B \\ A \sim_B C \\ C \sim_A B \quad (3) \end{cases}$

(2): $A*D*B \Leftrightarrow \begin{cases} A \not\sim_D B \\ A \sim_B D \\ D \sim_A B \quad (4) \end{cases}$

$\Rightarrow$ (3): $C \sim_A B$, (4): $B \sim_A D$ $\Big\} \Rightarrow D \sim_A C$ Άτοπο

$C * A * D \Rightarrow C \not\sim_A D$

β) $A \neq B$ (εσωτ. σημεία)



Αν $AB = CD \rightarrow \{A, B\} = \{C, D\}$

Υπόθεση: $\overline{AB} = \overline{CD}$

$C \in \overline{CD} = \overline{AB} \Rightarrow C = A$ ή $C = B$ ή $A * C * B$ $\quad$ (a) (b) (c)

$D \in \overline{CD} = \overline{AB} \Rightarrow D = A$ ή $D = B$ ή $A * D * B$ $\quad$ (a') (b') (c')

1ο Βήμα: Ο.δ.ο η (c) & (c') δεν ισχύουν ταυτόχρονα. Έστω ότι (c),(c') αληθείς $\Rightarrow$
$\Rightarrow C, D$ λέγω (εσωτ. σημεία $\overline{AB}$) των A, B $\xRightarrow{(\alpha)\ \text{εσωτ}}$ όχι $C * A * D$

$A * C * B \rightarrow C \neq A$, $C \neq B$ $\Big\}$ (Δ_1)

$A * D * B \rightarrow D \neq A, B$

$A \in \overline{AB} = \overline{CD} \rightarrow A \in \overline{CD}$

Άρα $A \neq C$, $A \neq D \rightarrow A$ εσωτ. σημείο $\overline{CD}$
$C * A * D$

2ο Βήμα: όχι η (c) $\Rightarrow C = A$ ή $C = B$

$$\left.\begin{array}{l} A = C \\ \overline{AB} = \overline{CD} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\overline{AB} = \overline{AD}}$$

Θδο $B = D$

Ας υποθέσουμε ότι $B \neq D$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} B \in \overline{AB} = \overline{AD} \Rightarrow B \in \overline{AD} \\ D \neq B \\ D \neq A \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A * B * D} \\ \left.\begin{array}{r} D \in \overline{AD} = \overline{AB} \Rightarrow D \in \overline{AB} \\ D \neq A \,(?) \\ D \neq B \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A * D * B} \end{array}\right\}$$

Άτοπο, προέκυψε από την $\overline{AB} = \overline{AD}$ και $B \neq D$

άρα $\underline{B = D}$ & $\underline{A = C}$

(?) Αν $D = A$ τότε $\overline{AD} = \{A\}$, $\overline{AB} \ni A, B$ και $A \neq B$